ISSN : 1411-1624
e-ISSN: 2621-8089

MULTIPLISITAS NEWTON DAN TITIK TETAP ATRAKTIF DALAM MENENTUKAN KEKONVERGENAN

Gani Gunawan
Staf Pengajar Prodi Matematika FMIPA UNISBA
Jalan Rangga Gading No. 1 Bandung
Sur-el: ggani9905@gmail.com

***Abstract**. Newton's method is one of the numerical methods used in finding polynomial roots. This method will be very effective to use, if the initial estimate of the roots for the Newton iteration function satisfies sufficient Newtonian convergence. In this article we will analyze the efficacy of this method by looking at the relationship between the fixed point method and Newton's iteration function. When the iteration of the function converges to the root, the velocity of convergence can also be determined. In terms of the speed of convergence, it turns out to be very dependent on the multiplicity of Newton's method itself.*

***Key words**: Multiplicity, Newton's Method*

***Abstrak.** Metoda Newton adalah salah satu metoda numerik yang digunakan dalam pencarian akar polynomial. Metoda ini akan sangat ampuh digunakan, jika terkaan awal akar untuk fungsi iterasi Newton memenuhi syarat cukup kekonvergenan Newton. Dalam artikel ini akan ditinjau secara analitik keampuhan dari metoda tersebut dengan melihat hubungan antara metoda titik tetap dan fungsi iterasi Newton. Bilamana iterasi fungsi konvergen ke akarnya, maka kecepatan kekonvegenan juga dapat ditentukan. Dalam hal kecepatan kekonvergenan ini ternyata sangat bergantung pada multiplisitas dari metoda Newton itu sendiri.*

***Kata kunci**: Multiplisitas, Metoda Newton*

1. PENDAHULUAN

Menurut kepustakaan [6], [7], [8] dan [9] dinyatakan bahwa jika diberikan suatu fungsi $f(x)$ untuk $x \in \Upsilon$, maka untuk menentukan suatu titik x_r sedemikian sehingga $f(x_r) = 0$, dapat dibuat dengan cara memilih suatu titik x_0 sebagai terkaan awal (*initial guess*) akar dari fungsi tersebut, selanjutnya secara numerik dapat digunakan metoda Newton. Prinsip dari metoda Newton ini adalah dengan cara membuat suatu garis singgung kurva f di sekitar titik akar fungsi tersebut [1]. Dalam hal ini titik tempat di mana garis singgung itu memotong sumbu X di dekat perpotongan kurva f dengan sumbu X secara numerik diperkirakan sebagai akar fungsi tersebut. Jadi jika dipilih titik awal di sekitar akar fungsi tersebut adalah x_0, maka dapat dibuat suatu garis singgung yang menyinggung koordinat titik $(x_0, f(x_0))$. Karena kemiringan garis singgung pada koordinat titik tersebut adalah $f'(x_0)$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Selanjutnya, tetapkan nilai $y = 0$ dan tentukan akar dari garis singgung tersebut, misalnya x_1 sedemikian sehingga diperoleh

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Proses perhitungan ini dapat diteruskan, hingga akar dari fungsi f dapat dicapai. Proses

ISSN : 1411-1624
e-ISSN: 2621-8089

perhitungan ini merupakan perhitungan *iteratif*, seperti yang dinyatakan dalam teorema 1 berikut, [4].

Teorema 1 (*Teorema Newton – Raphson*).
Diasumsikan $f \in C^2[a,b]$ *dan ada sebuah bilangan* $p \in [a,b]$, *dengan* $f(p) = 0$. *Jika* $f'(p) \neq 0$ *dan ada* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga barisan* $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ *yang didefinisikan oleh iterasi*

$$p_k = g(p_{k-1}) = p_{k-1} - \frac{f(p_{k-1})}{f'(p_{k-1})} \qquad (1)$$

untuk $k = 1, 2, ...$
akan konvergen ke p untuk suatu aproksimasi awal $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

Persamaan (1) tersebut dinamakan sebagai *fungsi iterasi Newton*, seperti yang dinyatakan dalam definisi 1 berikut,

Definisi 1 (*Fungsi Iterasi Newton*).
Fungsi Iterasi Newton didefinisikan oleh

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (2)$$

Namun yang dinyatakan dalam teorema 1 tersebut, kekonvergenan barisan titik hasil iterasi Newton bergantung pada fungsi yang diberikan dan titik awal yang dipilih (*initial point*), tampaknya barisan titik-titik hasil iterasi Newton tersebut tidak selalu konvergen ke akarnya. Misalnya, agar metoda Newton berhasil dalam menetukan akar dari suatu fungsi diperlukan bahwa untuk setiap x, $f(x) = 0$ dan $f'(x) \neq 0$. Jika hal ini tidak dipenuhi, maka fungsi iterasi Newton tidak terdefinisikan. Oleh karena itu, dalam memilih titik awal sebagai terkaan awal akar fungsi harus cukup dekat ke titik akarnya [8]. Dalam prakteknya cukup sulit dilakukan, karena akar fungsi belum diketahui. Hal yang mungkin terjadi adalah bilamana $f(p_{k-1})$ cukup dekat ke nol, maka p_{k-1} dapat diterima sebagai titik pengaproksimasian terhadap akar fungsi. Dalam artikel ini akan diselidiki secara analitik situasi dimana kegagalan fungsi iterasi Newton terjadi, dan akan mendapatkan suatu fakta yang menarik yaitu bagaimana kecepatan suatu iterasi akan konvergen.

2. METODOLOGI PENELITIAN

Untuk menyelidiki akibat dari situasi yang disebutkan di atas, dapat dilihat dengan menyelidiki hubungan antara fungsi iterasi Newton dan metoda titik tetap. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa, akar-akar fungsi f juga merupakan titik-titik tetap dari fungsi iterasi Newton dan sebaliknya, seperti yang dinyatakan dalam definisi 2 dan teorema 3 berikut. [3].

Definisi 2 (*Titik Tetap*).
Titik x dinamakan sebagai titik tetap jika diberikan suatu fungsi G berlaku $G(x) = x$.

Teorema 3 (*Teorema Titik Tetap*)
Diasumsikan (i) $G, G' \in C[a,b]$, (ii) *K adalah konstanta positif*, (iii) $p_0 \in (a,b)$, dan (iv) $G(x) \in [a,b]$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$.
(a) *Jika* $|G'(x)| \leq K < 1$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *maka iterasi* $p_n = G(p_{n-1})$ *akan konvergen ke* $p \in [a,b]$. *Dalam hal ini p dinamakan titik tetap attraktif.*
(b) *Jika* $|G'(x)| > 1$ *untuk setiap* $x \in [a,b]$, *maka iterasi* $p_n = G(p_{n-1})$ *tidak akan konvergen ke* $p \in [a,b]$.

Selanjutnya dari definisi 2 dan teorema 3 tersebut terlihat bahwa untuk mencari akar fungsi secara numerik dapat ditentukan dengan menggunakan metoda titik tetap. Dalam hal ini disyaratkan bahwa titik yang diperoleh melalui pengiterasian metoda titik tetap dapat merupakan akar dari suatu fungsi jika titik tersebut

 ISSN : 1411-1624
e-ISSN: 2621-8089

merupakan titik *attraktif*, yaitu titik yang dapat didideﬁnisikan dalam deﬁnisi 3 berikut [8].

Definisi 4 (*Titik attraktif*).
x_0 dikatakan titik attraktif dari suatu fungsi G jika memenuhi ketaksamaan

$$\left|G'(x_0)\right| < 1$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, kegagalan metoda Newton dapat terjadi bilamana $f'(x) = 0$. Namun melalui pengamatan lebih lanjut, kegagalan metoda ini dapat juga terjadi melalui *ordo akar* itu sendiri. Adapun order akar dari suatu fungsi dideﬁnisikan sebagai berikut,

Definisi 5 (*Orde Akar*).
Misalkan $f(x)$ dan turunannya $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^M(x)$ terdefinisikan dan kontinu pada selang di sekitar $x = p$. Dikatakan bahwa $f(x) = 0$ mempunyai akar order M pada $x = p$ jika dan hanya jika
$f(p) = 0$, $f'(p) = 0$, $f''(p) = 0$, ... $f^{M-1}(p) = 0$, dan $f^M(p) \neq 0$

Dalam hal ini orde akar M =1 disebut *akar simple* (*simple root*), orde akar $M = 2$ disebut *akar ganda* (*double root*), yang selanjutnya untuk $M > 1$ disebut *akar multiple*. Khusus berkatian dengan $M > 1$ ini, dideﬁnisikan pengertian dari *multiplisitas* yang dinyatakan dalam deﬁnisi 6 berikut,

Definisi 6 (*Multiplisitas*)
Akar x_0 dari f mempunyai multiplitas k, jika $f^{[k-1]}(x_0) = 0$ dan $f^{[k]}(x_0) \neq 0$, dengan $f^{[k]}(x_0)$ menotasikan turunan ke k dari f pada x_0.

Menurut pengertian multiplisitas ini dapat dikatakan bahwa jika x_0 adalah akar dari f dengan multiplisitas k, maka f dapat dituliskan dalam bentuk $f(x) = (x - x_0)^k\, h(x)$ dengan $h(x)$ tidak mempunyai akar pada x_0, seperti yang dinytakan dalam lemma 7 [10].

Lemma 7
Jika x_0 adalah akar fungsi f dengan multiplisitas k, maka $f(x)$ dapat ditulis

$$f(x) = (x - x_0)^k\, h(x)$$

dengan $h(x)$ adalah fungsi kontinu sedemikian sehingga $h(x_0) \neq 0$.

Oleh karena itu, untuk menyelidiki tentang kegagalan metoda Newton yang ditinjau dari bilangan multiplisitas dapat dijelaskan melalui teorema berikut,

Teorema 8
Jika f adalah suatu fungsi dengan Fungsi iterasi Newton N maka x_0 adalah akar dari f dengan multiplisitas k jika dan hanya jika x_0 adalah titik tetap attraktif dari N.

<u>Bukti :</u>
Untuk kasus bilamana akar x_0 dari fungsi f mempunyai multiplisitas 1, maka menurut deﬁnisi 6, $f'(x_0) \neq 0$ dan $f(x_0) = 0$. Dari persamaan (1) dan (2) dapat ditulis $N(x_0) = 0$. Jadi x_0 adalah titik tetap dari N. Sebaliknya, jika x_0 adalah titik tetap dari N, maka $N(x_0) = x_0$ yang mengakibtkan $f(x_0) = 0$ yang membuktikan bahwa x_0 adalah akar dari f. Untuk membuktikan kasus lebih umum di mana akar x_0 dari f mempunyai multiplisitas $k > 1$, akan digunakan Lemma 7. Misalkan fungsi $f(x)$ mempunyai akar x_0 dengan multiplisitas $k > 1$ maka $f(x) = (x - x_0)^k\, h(x)$. Akibatnya

$$f'(x) = k(x - x_0)^{k-1}\, h(x) + (x - x_0)^k h'(x)$$

Selanjutnya diperoleh

ISSN : 1411-1624
e-ISSN: 2621-8089

$$N(x)=x-\frac{(x-x_0)^k h(x)}{k(x-x_0)^{k-1}h(x)+(x-x_0)^k h'(x)} \quad (3)$$

$$N(x)=x-\frac{(x-x_0)h(x)}{kh(x)+(x-x_0)h'(x)} \quad (4)$$

Dengan mensubstitusi akar x_0 ke persamaan (4),

$$N(x_0) = x_0$$

yang membuktikan bahwa akar fungsi dengan multiplisitas $k > 1$ adalah titik tetap dari $N(x)$. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa titik ini adalah titik *attraktif*. Perhatikan bahwa turunan dari $N(x)$ adalah

$$N'(x)=\frac{k(k-1)h^2(x)+2k(x-x_0)h(x)h'(x)+(x-x_0)^2h(x)h''(x)}{k^2h^2(x)+2k(x-x_0)h(x)h'(x)+(x-x_0)^2(h'(x))^2}$$

Dengan mengambil $x = x_0$, maka diperoleh

$$\frac{-f''(x_k)(x_r-x_k)^2}{2}=N'(x_0)=\frac{k(k-1)(h(x))^2}{k^2(h(x))^2}$$

atau $N'(x)=\frac{k-1}{k}<1$

Jadi x_0 adalah titik tetap *attraktif* dari N. Sebaliknya, jika titik x adalah titik tetap dari N maka titik tersebut adalah akar dari f. Dengan menggunakan persamaan (4), diperoleh $(x-x_0)h(x)=0$. Karena $h(x) \neq 0$, maka pastilah $x = x_0$.

Konvergensi Newton

Dalam [2], dikatakan bahwa kovergensi Newton yang dinyatakan dalam teorema 1 di atas bersifat konvergen kuadratis, seperti yang dinyatakan teorema 10. Adapun pengertian dari konvergen kuadratis dinyatakan dalam definisi 9 berikut,

Definisi 9 (*Konvergen Kuadratis dan Konvergen Linear*)

Misalkan barisan $\{x_k\}$ *konvergen ke x maka dikatakan konvergen kuadratis ke x, jika*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x|}{|x_k-x|^2}=\mu$$

dengan $\mu > 0$. *Sedangkan dikatakan konvergen linear ke x, jika*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x|}{|x_k-x|}=\mu$$

dengan $0 < \mu < 1$.

Teorema 10

Jika akar x_0 dari f yang mempunyai multiplisitas 1 dan barisan titik yang diperoleh melalui fungsi iterasi Newton konvergen, maka kekonvergenan dari barisan tersebut bersifat kuadratis.

<u>Bukti:</u>

Misalkan $\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x|}{|x_k-x|^2}$ ditulis dalam bentuk $\lim_{k\to\infty}\frac{|E_{k+1}|}{|E_k|^2}$ dengan E menyatakan error tiap suku.

Pandang Polynomial Taylor dari fungsi $f(x)$ yang akan ditentukan pada titik di sekitar x_k. Diasumsikan $f'(x_k) \neq 0$ maka

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)(x-x_k)^2}{2} \quad (5)$$

Jika $f(x)$ mempunyai akar pada $x = x_r$, kemudian x_r disubstitusikan untuk x ke (5) maka diperoleh

$$0=f(x_k)+f'(x_k)(x_r-x_k)+\frac{f''(x_k)(x_r-x_k)^2}{2} \quad \text{atau}$$

$$\frac{-f''(x_k)(x_r-x_k)^2}{2}=f(x_k)+f'(x_k)(x_r-x_k)$$

Dengan membagi kedua ruas dengan $f'(x_k)$ diperoleh

$$\frac{-f''(x_k)(x_r-x_k)^2}{2f'(x_k)}=\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}+(x_r-x_k)$$

dengan menggunakan (1) akan diperoleh

ISSN : 1411-1624
e-ISSN: 2621-8089

$$\frac{-f''(x_k)(x_r - x_k)^2}{2f'(x_k)} = x_r - x_{k+1}$$

atau $$\frac{-f''(x_k)E_k^{\ 2}}{2f'(x_k)} = E_{k+1}$$

Jika dalam fakta ini barisan titik hasil iterasi konvergen maka $\lim_{k\to\infty} f'(x_k) = f'(x_r)$ dan $\lim_{k\to\infty} f''(x_k) = f''(x_r)$. Sehingga

$\frac{E_{k+1}}{E_k^2} = \frac{-f''(x_k)}{2f'(x_k)}$. Jadi

$$\lim_{k\to\infty}\frac{E_{k+1}}{E_k^2} = \frac{|-f''(x_k)|}{|2f'(x_k)|} > 0$$

Sementara $f'(x_r) \neq 0$ karena x_r mempunyai multiplisitas 1. Jadi jika x_r mempunyai multiplisitas lebih dari 1, maka dengan menggunakan lemma 7, $f(x)$ dapat ditulis sebagai $f(x) = (x - x_r)^k\, h(x)$. Oleh karena itu

$$f'(x) = k(x - x_r)^{k-1} h(x) + (x - x_r)^k h'(x)$$

yang mengakibatkan $f(x_r) = 0$.

Modifikasi Metoda Newton

Dalam pembuktian teorema 10 di atas, tampak bahwa akar dari suatu fungsi yang mempunyai multiplisitas lebih dari 1, konvergensinya tidak bersifat kuadratis. Oleh karena itu menurut [1] dan [6] diusulkan suatu alternatif metoda sebagai modifikasi metoda Newton, yaitu

$$x_{r+1} = x_r - m\frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \qquad (6)$$

dengan m adalah bilangan multiplisitas akar. Dalam implementasinya, alternatif ini tidak memuaskan karena bilangan multiplitas m harus diketahui lebih dulu. Disamping itu, untuk x dekat akar ganda *double root*, nilai $f(x) = 0$ dan juga nilai $f'(x) = 0$, yang dapat mengakibatkan pembagian dengan nol. Namun pembagian dengan nol ini dapat dihindari dengan melihat fakta bahwa $f(x)$ lebih dulu nol sebelum $f'(x)$ [5]. Jadi dalam artikel ini diusulkan alternatif metoda lain, yaitu dengan mendefinisikan

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Perhatikan bahwa bentuk $u(x)$ ini mempunyai akar yang sama dengan $f(x)$, sebab jika $u(x) = 0$ maka $f(x) = 0$. Selanjutnya dapat ditulis

$$x_{r+1} = x_r - \frac{u(x_r)}{u'(x_r)}$$

yang mana dalam hal ini,

$$u'(x) = \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]' = \frac{f'(x)f'(x) - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}$$

sehingga diperoleh

$$x_{r+1} = x_r - \frac{\dfrac{f(x_r)}{f'(x_r)}}{\dfrac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}}$$

atau

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)f'(x_r)}{[f'(x_r)]^2 - f''(x_r)f(x_r)} \qquad (7)$$

Persamaan (7) ini berlaku secara umum, yaitu persamaan (7) ini dapat digunakan untuk pencarian akar untuk dengan multiplisitas lebih dari atau sama dengan satu dan berhingga. Untuk melihat lebih lanjut terkait dengan penggunaan dari persamaan (7) ini, perhatikan fungsi $f(x) = x^5 - 5x^2 + 7x - 3$. Akar dari fungsi ini merupakan akar dengan multiplisitas dua. Dengan mengambil terkaan awal $x_0 = 0$, maka

ISSN : 1411-1624
e-ISSN: 2621-8089

tabel 1 berikut memberikan hasil yang diperoleh melalui persamaan (6) dan melalui persamaan (7).

Menggunakan persamaan (6)		***Menggunakan Persamaan (7)***	
r	x_r	r	x_r
0	0.000000000	0	0.000000000
1	0.428571429	1	1.105263158
2	0.685714286	2	1.003081664
3	0.832865400	3	1.000002382
4	0.913328983		
5	0.955783329		
6	0.977655101		

Tabel.1 hasil perhitungan iterasi metoda Newton dimodifikasi

Dari tabel tersebut tampak bahwa, kedua iterasi yang dilakukan melalui persamaan (6) dan persamaan (7) konvergen ke akar x = 1, namun metoda Newton yang domifikasi pada paersamaan (7) banyaknya iterasi lebih sedikit.

4. KESIMPULAN

Dalam perhitungan numerik untuk menentukan akar fungsi yang mempunyai bilangan multiplisitas lebih dari satu (*multiple*) dengan menggunakan Metoda Newton mempunyai kecepatan kekonvergenan lebih lambat dari pada untuk kasus mencari akar fungsi yang mempunyai bilangan multiplisitas satu (*simple root*). Metoda Newton yang dimodifikasi pada persamaan (7) memberikan suatu cara yang lebih umum dalam menentukan akar fungsi, baik untuk akar fungsi yang *simple root* maupun akar fungsi yang mempunyai bilangan multiplisitas yang lebih dari satu, walaupun dalam penggunaannya kurang efektif dibanding dengan Metoda Newton pada persamaan (1) karena memerlukan lebih banyak komputasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Capra, Steven C and Canale, Raymond P, *Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications*, MacGraw-Hill Book Company, 1991.

[2] Elis R Wulan, Sri M Sukarti, Diny Zulkarnaen, *Perbandingan Tingkat Kecepatan Konvergensi dari Metoda Newton Raphson dan Metoda Secant Setelah Mengaplikasi Metoda Aiken's dalam Perhitungan akar Pangkat Tiga*, Jurnal Matematika Integratif, Volume 12 No. 1, April 2016. Pp 35-42.

[3] Epperson. F James, *An Introductions to Numerical Methods and Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, USA, 2001.

[4] Fink, Kurtis. D, *Numerical Methods Using Matlab 3rd Edition*, Prentice Hall, Inc. USA. 1999.

[5] Mahmul, Mariatul Kitfiah, Yudhi, *Modifikasi Metode Newton-Raphson Untuk Mencari Solusi Persamaan Linier dan Non Linier*, Buletin Ilmiah Mat.Stat, dan Terapannya (Bimaster) Volume 6 No.02, 2017, hal 69-76

[6] Mathew, John. H, *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, 2nd Editioni,* Prentice-Hall International, USA, 1993.

[7] Patrisius Batarius, *Nilai Awal Pada Metode Newton-Raphson yang Dimodifikasi dalam Penentuan Akar Persamaan*, Pi: Mathematics Education Journal, Volume 1. No.3 Oktober 2018, 105-112

[8] Raskin, S, *Newton's Method*, Research Report, 2006.

[9] Zaytman, Genya, *"Newton's Method"*, Research Report, 2005.

[10] Zuhnia Lega, Agusni, Supriadi Putra, *Metoda Iterasi Tiga Langkah Dengan Orde Konvergensi Lima Untuk Menyelesaikan Persamaan Non Linier Berakar Ganda*, JOM FMIPA Volume 1 No. 2, Oktober 2014